X VAR sur $(\Omega,\mathbf{A},P)$. f_X est une densité de X . F_X est la fonction de répartition de X . Si $F_X(M)=\dfrac{1}{2}$, M est une médiane théorique de X . On a alors $P(X<M)=P(X>M)=\dfrac{1}{2}$

$(X_1,X_2,...,X_n)$ est un $n-$échantillon i.i.d. de la loi de X donc $X_1,X_2,...,X_n$, indépdtes de mêmes loi que X .
$\overline{X_n}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ est la moyenne empirique de 1'échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$.

Pour tout $\omega\in\Omega$, $Y_1(\omega),Y_2(\omega),...,Y_n(\omega)$ est un réarrangement par ordre croissant des réels $X_1(\omega),X_2(\omega),...,X_n(\omega)$. On a donc $Y_1(\omega)\le Y_2(\omega)\le..\le Y_k(\omega)\le.....\le Y_n(\omega)$.
Si on prend k indices distincts $i_1,i_2,...,i_k$ dans $[[1,n]]$,
le plus grand des réels $X_{i_1}(\omega),X_{i_2}(\omega),..,X_{i_k}(\omega)$ est supérieur ou égal à $Y_k(\omega)$.
On a donc $Y_k=\min\limits_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}\left(\max(X_{i_1},X_{i_2},..,X_{i_k})\right)$ **(1)** ce qui peut s'écrire $Y_k=\psi_k(X_1,X_2,...,X_n)$.

En particulier $Y_1=\inf(X_1,X_2,...,X_n)$ et $Y_n=\sup(X_1,X_2,...,X_n)$.

On admet que $Y_1,Y_2,...,Y_n$ sont des variables aléatoires à densité .

Si $n=2l+1$, $Y_1\le Y_2\le..\le Y_l\le Y_{l+1}\le Y_{l+2}\le.....\le Y_{2l+1}$ et Y_{l+1} est la médiane empirique de de 1'échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$.

Partie I

1) a) soit $k\in[[1,n]]$ .Soit F_{Y_k} la fonction de répartition de Y_k et f_k une densité de Y_k .

$\forall x\in\mathbf{R}, F_{Y_1}(x)=P(Y_1\le x)=1-P(Y_1>x)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i>x)\right)$ et comme $X_1,X_2,...,X_n$ sont indépendantes ,

$\forall x\in\mathbf{R}, F_{Y_1}(x)=1-\left(1-F_X(x)\right)^n$. Comme Y_1 admet une densité f_{Y_1}, on a sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points , $f_{Y_1}(x)=F'_{Y_1}(x)=-n\left(1-F_X(x)\right)^{n-1}(-F'_X(x))$

autrement dit , f_{Y_1} peut être définie par $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}\ ,\ f_{Y_1}(x)=n\left(1-F_X(x)\right)^{n-1}f_X(x)}$.

$\forall x\in\mathbf{R}, F_{Y_n}(x)=P(Y_n\le x)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\le x)\right)$ et comme $X_1,X_2,...,X_n$ sont indépendantes ,

$\forall x\in\mathbf{R}, F_{Y_1}(x)=\left(F(x)\right)^n$. Comme Y_n admet une densité f_{Y_n}, on a sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points, $f_{Y_n}(x)=F'_{Y_n}(x)=n\left(F_X(x)\right)^{n-1}F'_X(x)$

autrement dit , f_{Y_1} peut être définie par $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}\ ,\ f_{Y_n}(x)=n\left(F_X(x)\right)^{n-1}f_X(x)}$.

b) $J_k(x)=\mathbf{1}_{[X_k\le x]}$ variable indicatrice de $[X_k\le x]$. $P[X_k\le x]=F_X(x)$ donc $J_k(x)\mapsto\mathbf{B}(1,F_X(x))$.
Comme $X_1,X_2,...,X_n$,sont indépendantes , $J_1(x),J_2(x),...,J_n(x)$ le sont aussi
et $S_n(x)$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même paramètre $F_X(x)$.
CCL : $\boxed{S_n(x)\mapsto\mathbf{B}(n,F_X(x))}$**.**

c) $Y_k = \min_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\left(\max(X_{i_1}, X_{i_2},.., X_{i_k})\right)$ donc $Y_k(\omega)\le x$ ssi il existe k indices distincts $i_1, i_2,..., i_k$ dans $[\![1,n]\!]$ tels que $\max(X_{i_1}(\omega), X_{i_2}(\omega),.., X_{i_k}(w))\le x$ autrement dit

$(Y_k\le x)$ est réalisé ssi il existe k indices distincts $i_1, i_2,..., i_k$ dans $[\![1,n]\!]$ tels que les variables $J_{i_1}(x), J_{i_2}(x),.., J_{i_k}(x)$ prennent toutes la valeur 1 . **CCL :** $\boxed{(Y_k\le x)=(S_n(x)\ge k)}$.

d) On en déduit $\forall x\in \mathbf{R}, F_{Y_k}(x)=P(Y_k\le x)=P(S_n(x)\ge k)=\sum_{j=k}^{n}P(S_n(x)=j)$.

Comme $S_n(x)\mapsto \mathbf{B}(n, F_X(x))$ **,** $\boxed{\forall x\in \mathbf{R}, F_{Y_k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(F_X(x))^j(1-F_X(x))^{n-j}}$**.**

e) Sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points , $f_{Y_k}(x)=F'_{Y_k}(x)$.

On peut donc poser pour tout $x\in \mathbf{R}$,

$$f_{Y_k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\left[j(F_X(x))^{j-1}f_X(x)(1-F_X(x))^{n-j}-(n-j)(F_X(x))^j(1-F_X(x))^{n-j-1}f_X(x)\right]$$

soit $$f_{Y_k}(x)= f_X(x)\left[\sum_{j=k}^{n}\underbrace{j\binom{n}{j}}_{=n\binom{n-1}{j-1}}(F_X(x))^{j-1}(1-F_X(x))^{n-j}-\sum_{j=k}^{\cancel{n}\,n-1}\underbrace{(n-j)\binom{n}{n-j}}_{=n\binom{n-1}{n-j-1}}(F_X(x))^j(1-F_X(x))^{n-j-1}\right]$$

En posant $j'=j+1$ dans le deuxième $\sum$, on obtient

$$f_{Y_k}(x)=nf_X(x)\left[\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}(F_X(x))^{j-1}(1-F_X(x))^{n-j}-\sum_{j=k+1}^{n}\binom{n-1}{n-j}(F_X(x))^{j-1}(1-F_X(x))^{n-j}\right].$$

Enfin par télescopage , $f_{Y_k}(x)=n\binom{n-1}{k-1}(F_X(x))^{k-1}(1-F_X(x))^{n-k}f_X(x)$, autrement dit

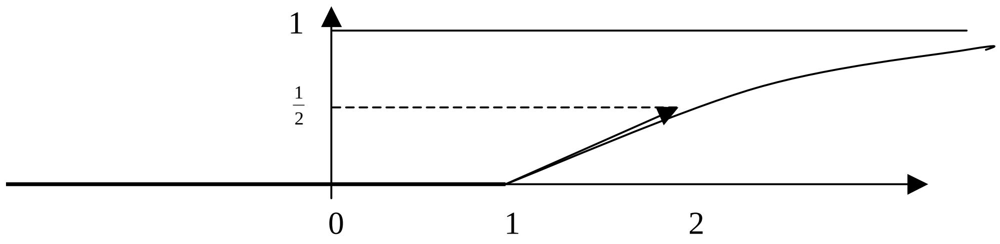
$$\boxed{f_{Y_k}(x)=k\binom{n}{k}(F_X(x))^{k-1}(1-F_X(x))^{n-k}f_X(x)}.$$

f) Soit $r\in \mathbf{N}^*$. Supposons l'existence de $E(X^r)$. Alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}x^r f_X(x)dx$ est absolument convergente. $E(Y_k^{\,r})$ existe ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}x^r f_{Y_k}(x)dx$ est absolument convergente.

$F_X(x)\in[0,1]$ et $f_X(x)\ge 0$ donc $0\le\left|x^r f_{Y_k}(x)\right|\le k\binom{n}{k}\left|x^r f_X(x)\right|$. Le critère de comparaison permet de conclure à la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^r f_{Y_k}(x)\right|dx$. **CCL :** $\boxed{\text{Si } E(X^r)\text{ existe , } E(Y_k^{\,r})\text{ existe}}$**.**

2) a) $\forall x<1,\ F_X(x)=0$. $\forall x\ge 1,\ F_X(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. $\forall x\ge 1,\ F_X{}'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

F_X est croissante sur $[1,+\infty[$. $F_X{}'(1)=\dfrac{1}{2}$. Equation de la tangente en $(1,0)$: $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.



F_X est continue sur $]-\infty,1[$ et sur $[1,+\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to 1^-} F_X(x) = 0 = F_X(1)$.

Finalement F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}-\{1\}$.

CCL : $\boxed{X \text{ est une variable aléatoire admettant un densité } f_X}$ définie par

$$\boxed{\forall x<1,\quad f_X(x)=0\ ;\ \forall x\geq 1,\quad f_X(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}}$$

b) Soit $r\in\mathbf{N}^*$. $E(X^r)$ existe ssi l'intégrale $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^r f_X(x)\right|dx$ est convergente .

$I=\int_1^{+\infty} x^r f_X(x)dx$ et $\forall x\geq 1,\ \ x^r f_X(x)=\dfrac{x^r}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}-r}}$.

Pour $r\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{3}{2}-r<1$ donc I est une intégrale de Riemann divergente .

CCL : $\boxed{X \text{ n'admet aucun moment.}}$

c) $F_X(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow (1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$ et $x\geq 1)\Leftrightarrow x=4$. $\boxed{M=4}$

d) D'après1) e) , $\forall x\in\mathbf{R},\ f_{Y_k}(x)=k\dbinom{n}{k}(F_X(x))^{k-1}(1-F_X(x))^{n-k}\ f_X(x)$.

Ici on a donc $\forall x<1,\ f_{Y_k}(x)=0$ et $\forall x\geq 1,\ f_{Y_k}(x)=k\dbinom{n}{k}(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{k-1}(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{n-k}\ \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

Autrement dit $\boxed{\forall x<1,\ f_{Y_k}(x)=0}$ et $\boxed{\forall x\geq 1,\ f_{Y_k}(x)=\dfrac{k}{2}\dbinom{n}{k}(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{k-1}\dfrac{1}{x^{\frac{n-k+3}{2}}}}$.

On en déduit $f_{Y_k}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{k}{2}\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{x^{\frac{n-k+3}{2}}}$.

3) a) Soit $n\geq 3$ et $k\in[[1,n-2]]$. $E(Y_k)$ existe ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{Y_k}(x)dx$ est abst convergente

autrement dit si $\int_1^{+\infty} xf_{Y_k}(x)dx$ est convergente . $xf_{Y_k}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}=\dfrac{k}{2}\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{x^{\frac{n-k+1}{2}}}$ et

$\forall k\in[[1,n-2]]$, $\dfrac{n-k+1}{2}\geq\dfrac{3}{2}>1$ donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{n-k+1}{2}}}dx$ cv

puis par critère d'équivalence les fonctions étant positives , $\int_1^{+\infty} xf_{Y_k}(x)dx$ est convergente .

CCL : $\boxed{\forall k\in[[1,n-2]]\,, E(Y_k)\text{ existe}}$.

b) On a $E(Y_k)=\int_1^{+\infty} x f_{Y_k}(x)dx=\frac{k}{2}\binom{n}{k}\int_1^{+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^{k-1}\frac{1}{x^{\frac{n-k+1}{2}}}dx$. Soit $I=\int_1^{+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^{k-1}\frac{1}{x^{\frac{n-k+3}{2}}}dx$

Effectuons dans I le changement de variable $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$ autrement dit $x=\frac{1}{t^2}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1 \text{ pour } t=1 \\ x\to+\infty \text{ qd } t\to 0 \\ dx=-\frac{2}{t^3}dt \end{array}}$$

$t\to\frac{1}{t^2}$ est de classe C^1, strictement décroissante sur $]0,1]$.

On obtient une intégrale $J=\int_1^0(1-t)^{k-1}t^{n-k+1}\left(-\frac{2}{t^3}\right)dt$ de même nature que I et égale en cas de convergence .

Comme I cv , J cv et $I=J=2\int_0^1(1-t)^{k-1}t^{n-k-2}dt$.

Finalement $\boxed{E(Y_k)=k\binom{n}{k}\int_0^1(1-t)^{k-1}t^{n-k-2}dt}$.

c) Soit $(r,s)\in(\mathbf{N}^*)^2$. Posons $I_{r,s}=\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt$.

Montrons par récurrence sur l'entier r que $\forall r\in\mathbf{N}^*,\left(\forall s\in\mathbf{N}^*,\ I_{r,s}=\frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}\right)$.

• $\forall s\in\mathbf{N}^*,\ I_{1,s}=\int_0^1(1-t)^{s-1}dt=\left[-\frac{(1-t)^s}{s}\right]_0^1=\frac{1}{s}=\frac{0!(s-1)!}{s!}$. La pté est vraie pour $r=1$.

• Soit $r\in\mathbf{N}^*$. Supposons $\forall s\in\mathbf{N}^*$, $I_{r,s}=\frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}$. Calculons I_{r+1},s par une IPP :

$$I_{r+1},s=\int_0^1 t^r(1-t)^{s-1}dt=\left[-t^r\,\frac{(1-t)^s}{s}\right]_0^1+\int_0^1 rt^{r-1}\,\frac{(1-t)^s}{s}dt .$$

Comme $r\geq 1;\ s\geq 1$, le crochet s'annule et $\forall s\in\mathbf{N}^*,\ I_{r+1},s=\frac{r}{s}I_{r,s+1}$.

Avec l'hypothèse de récurrence , on obtient $\forall s\in\mathbf{N}^*,\ I_{r+1},s=\frac{r}{s}\frac{(r-1)!(s)!}{(r+s)!}=\frac{(r)!(s-1)!}{(r+s)!}$.

La pté est vraie au rang $r+1$.

CCL : $\boxed{\forall r\in\mathbf{N}^*,\forall s\in\mathbf{N}^*,\ I_{r,s}=\frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}}$.

d) On en déduit d'après 3) b) , $\forall k\in[[1,n-2]]$, $E(Y_k)=k\binom{n}{k}I_{n-k-1,k}$ autrement dit

$\forall k\in[[1,n-2]]$, $E(Y_k)=k\binom{n}{k}\frac{(n-k-2)!(k-1)!}{(n-2)!}$.

CCL : $\boxed{\forall k\in[[1,n-2]],\ E(Y_k)=\frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k-1)}}$.

e) Supposons $n = 2l+1 \geq 5$. Alors $Y_1 \leq Y_2 \leq .. \leq Y_l \leq Y_{l+1} \leq Y_{l+2} \leq ..... \leq Y_{2l+1}(\omega)$.

Il y a autant de valeurs de l'échantillon inférieur à Y_{l+1} que de valeurs de l'échantillon supérieur à Y_{l+1} d'où le nom de médiane empirique de 1'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ pour Y_{l+1} .

Puisque $2l+1 \geq 5$, $l \geq 2$, $n-2-(l+1) = (2l+1)-2-(l+1) = l-2 \geq 0$ et donc $l+1 \in [[1, n-2]]$

D'après 3) d) , $E(Y_{l+1}) = \dfrac{(2l+1)(2l)}{l(l-1)} = \dfrac{4l+2}{l-1}$ et donc $\boxed{E(Y_{l+1}) = 4 + \dfrac{6}{l-1}}$.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{l \to +\infty} E(Y_{l+1}) = 4 = M}$.

Pour un échantillon de grande taille , la médiane empirique est proche de la médiane théorique .

4) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $Z_n = \dfrac{1}{n^2}\sup(X_1, X_2, ..., X_n) = \dfrac{Y_n}{n^2}$.

a) $\forall x \in \mathbf{R}, F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(Y_n \leq xn^2) = F_{Y_n}(xn^2) = \left(F_X(xn^2)\right)^n$. (voir 1) a))

On en déduit : $\boxed{\forall x < \dfrac{1}{n^2},\ F_{Z_n}(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \geq \dfrac{1}{n^2},\ F_{Z_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{xn^2}}\right)^n}$.

b) Soit la fonction φ_Z : $\forall x \leq 0$, $\varphi_Z(x) = 0$; $\forall x > 0$, $\varphi_Z(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

$\boxed{1}$ φ_Z est croissante sur $\mathbf{R}$ ($\forall x > 0$, $\varphi_Z'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 0$)

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$.

$\boxed{3}$ φ_Z est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ de plus $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi_Z(x) = 0 = \varphi_Z(0)$ donc φ_Z est continue sur $\mathbf{R}$ et a fortiori continue à droite en tout point .

D'après $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{\varphi_Z \text{ est la fonction de répartition d'une VAR } Z}$.

De plus comme φ_Z est continue sur $\mathbf{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbf{R} - \{0\}$, $\boxed{Z \text{ est une VAR admettant un densité}}$

c) • Soit $x \leq 0$ Alors $F_{Z_n}(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = 0 = \varphi_Z(x)$.

• Soit $x > 0$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 < x$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geq n_0$, $x > \dfrac{1}{n^2}$.

On a donc pour $n \geq n_0$, $F_{Z_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{xn^2}}\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{xn^2}}\right)}$.

On a $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{xn^2}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{xn^2}}$ et par suite $n\ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{xn^2}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On a donc $\forall x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \varphi_Z(x)$.

CCL : $\boxed{\text{La suite de variables aléatoires } (\mathrm{Z}_\mathrm{n})_{\mathrm{n} \in \mathbf{N}^*} \text{ converge en loi vers Z}}$.

Partie II $X \mapsto \mathbf{N}(\theta,1)$.

5) $X_1, X_2, ..., X_n$, indéptes de mêmes loi $\mathbf{N}(\theta,1)$ donc $\sum_{k=1}^{n} X_k \mapsto \mathbf{N}(n\theta, n)$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \mapsto \mathbf{N}(\theta, \frac{1}{n^2}\times n)$.

CCL : $\overline{X_n} \mapsto \mathbf{N}(\theta, \frac{1}{n})$. $\overline{X_n}$ est fonction de $(X_1, X_2, ..., X_n)$, $n-$ échantillon i.i.d. de la loi de X de paramètre θ, donc $\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur de } \theta}$. Puisque $\overline{X_n} \mapsto \mathbf{N}(\theta, \frac{1}{n})$, $E(\overline{X_n}) = \theta$ donc $\boxed{\overline{X_n} \text{ est sans biais}}$

et $r(\overline{X_n}) = V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n+\infty]{} 0$ donc $\boxed{\overline{X_n} \text{ est convergent}}$ (autre méthode : loi faible des grands nombres)

6) Φ est continue sur $\mathbf{R}$ (la loi normale est à densité) et strictement croissante ($\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$)
donc d'après le théorème de la bijection , Φ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]0,1\right[$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$)
et $\boxed{\Phi^{-1} \text{est une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur } \left]0,1\right[}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\Phi(x)$	0	$\frac{1}{2}$ ↗	1

x	0	$\frac{1}{2}$	1
	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

b) Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$. Posons $\mu(\alpha) = \delta$. On cherche donc $\delta > 0$ tel que $P\left[\overline{X_n} - \delta \le \theta \le \overline{X_n} + \delta\right] = 1 - \alpha$.
Alors $\left[\overline{X_n} - \delta \,,\ \overline{X_n} + \delta\right]$ st un intervalle de confiance de θ au risque α de marge d'erreur δ .

Or $P\left[\overline{X_n} - \delta \le \theta \le \overline{X_n} + \delta\right] = P\left[\theta - \delta \le \overline{X_n} \le \theta + \delta\right] = P\left[-\frac{\delta}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \le \frac{\overline{X_n} - \theta}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \le \frac{\delta}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right]$ et comme , $\overline{X_n} \mapsto \mathbf{N}(\theta, \frac{1}{n})$,

$P\left[\overline{X_n} - \delta \le \theta \le \overline{X_n} + \delta\right] = P\left[-\sqrt{n}\delta \le X^* \le \sqrt{n}\delta\right]$ où $X^* \mapsto \mathbf{N}(0,1)$.

On a donc : $P\left[\overline{X_n} - \delta \le \theta \le \overline{X_n} + \delta\right] = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(\delta\sqrt{n}) - \Phi(-\delta\sqrt{n}) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 2\Phi(\delta\sqrt{n}) - 1 = 1 - \alpha$

Autement dit comme $1 - \frac{\alpha}{2} \in \left]0,1\right[$, δ vérifie : $\delta\sqrt{n} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ et par suite $\mu(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$.

Or on sait que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ et donc pour tout $y \in \left]0,1\right[$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $-\Phi^{-1}(y) = \Phi^{-1}(1-y)$

CCL : $\boxed{\mu(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})}$.

c) Soit $b \in \left]0,1\right[$ et $\beta \in \left]0,1\right[$ tel que $\mu(\beta) = b\mu(\alpha)$. Alors $-\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\frac{\beta}{2}) = -\frac{b}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$.

On en déduit que $\boxed{\beta = 2\Phi\left(b\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})\right)}$.

$\alpha \in \left]0,1\right[$ donc $\frac{\alpha}{2} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et d'après le tableaude variation de Φ^{-1}, $\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) < 0$

et comme $b < 1$, $b\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) > \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$, puis par stricte croissance de Φ , $\Phi\left(b\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})\right) > \frac{\alpha}{2}$.

CCL : $\beta > \alpha$. Comme on avait $\mu(\beta) < \mu(\alpha)$, on peut conclure que si on veut diminuer la marge d'erreur , on obtient un intervalle de confiance avec un risque pus élevé .

7) ε_θ est l'ensembles des estimateurs de θ fonctions de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ sans biais et admettant une variance .
Soit $Z_n \in \varepsilon_\theta$. Z_n est optimal dans ε_θ si ($\forall U_n \in \varepsilon_\theta$, $V(Z_n) \leq V(U_n)$) .
On admet que $\forall U_n \in \varepsilon_\theta$, $\text{cov}(\overline{X_n}, U_n - \overline{X_n}) = 0$.

a) D'après 5) , $\boxed{\overline{X_n} \in \varepsilon_\theta}$.

b) $\forall U_n \in \varepsilon_\theta$, $V(Z_n) \leq V(U_n)$
Soit $U_n \in \varepsilon_\theta$ alors $\text{cov}(\overline{X_n}, U_n - \overline{X_n}) = 0$ et par bilinéarité de la covariance $\text{cov}(\overline{X_n}, U_n) = V(\overline{X_n})$.
On a donc $V(\overline{X_n} - U_n) = V(\overline{X_n}) - 2\,\text{cov}(\overline{X_n}, U_n) + V(U_n) = -V(\overline{X_n}) + V(U_n) \geq 0$ (une variance est positive).
On en conclut que $\forall U_n \in \varepsilon_\theta$, $V(\overline{X_n}) \leq V(U_n)$. $\boxed{\overline{X_n} \text{ est optimal dans } \varepsilon_\theta}$.

c) Soit Z_n un estimateur optimal dans ε_θ et $U_n \in \varepsilon_\theta$. On pose pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $A_n(\lambda) = Z_n + \lambda(U_n - Z_n)$.
On a alors $A_n(\lambda) = (1-\lambda)Z_n + \lambda U_n$. $A_n(\lambda)$ est fonction de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ donc est un estimateur de θ .
De plus Z_n et U_n admettent une espérance et une variance donc $A_n(\lambda)$ aussi .
Par linéarité de l'espérance $E(A_n(\lambda)) = (1-\lambda)E(Z_n) + \lambda E(U_n)$ et comme $U_n \in \varepsilon_\theta$ et $Z_n \in \varepsilon_\theta$,
$E(A_n(\lambda)) = (1-\lambda)\theta + \lambda\theta = \theta$. $A_n(\lambda)$ est donc un estimateur sans biais de θ admettant une variance: $\boxed{A_n(\lambda) \in \varepsilon_\theta}$

De plus $\boxed{V(A_n(\lambda)) = V(Z_n + \lambda(U_n - Z_n)) = V(Z_n) + \lambda^2 V(U_n - Z_n) + 2\lambda\,\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n)}$.

Comme $A_n(\lambda) \in \varepsilon_\theta$ et que Z_n est un estimateur optimal dans ε_θ, on $V(A_n(\lambda)) \geq V(Z_n)$.
Ainsi $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda^2 V(U_n - Z_n) + 2\lambda\,\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) \geq 0$.
On en déduit que le discriminant $\Delta = 4(\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n))^2$ est négatif ou nul ,
autrement dit $\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0$.
CCL : $\boxed{\text{Si } Z_n \text{ est optimal dans } \varepsilon_\theta \text{ , alors } (\forall U_n \in \varepsilon_\theta \text{ ,} \text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0)}$.

d) On a vu que $\overline{X_n}$ est optimal dans ε_θ. Soit Z_n un estimateur optimal dans ε_θ .
Alors d'après c) , $\text{cov}(Z_n, \overline{X_n} - Z_n) = 0$ et comme d'après le résultat admis $\forall U_n \in \varepsilon_\theta$, $\text{cov}(\overline{X_n}, U_n - \overline{X_n}) = 0$,
on a aussi $\text{cov}(\overline{X_n}, Z_n - \overline{X_n}) = 0$. On en déduit $\text{cov}(Z_n, \overline{X_n} - Z_n) + \text{cov}(\overline{X_n}, Z_n - \overline{X_n}) = 0$ et donc par bilinéarité de la covariance $\text{cov}(Z_n - \overline{X_n}, \overline{X_n} - Z_n) = 0$, autrement dit $V(Z_n - \overline{X_n}) = 0$.
Par suite , $Z_n - \overline{X_n}$ est presque sûrement constante et comme $E(Z_n - \overline{X_n}) = \theta - \theta = 0$, $\boxed{Z_n = \overline{X_n} \text{ p.s.}}$

Il y a unicité "presque sûre" de l'estimateur optimal dans ε_θ

8) a) Soit $x \in \mathbf{R}$. $F_X(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow P(X \leq x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow P\left(\dfrac{X-\theta}{1} \leq x - \theta\right) = \dfrac{1}{2}$.
Comme $X \mapsto \mathbf{N}(\theta, 1)$, $X^* = \dfrac{X-\theta}{1} \mapsto \mathbf{N}(0,1)$ et donc $F_X(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \Phi(x-\theta) = \dfrac{1}{2} = \Phi(0) \Leftrightarrow x = \theta$
(Φ injective).

CCL : $\boxed{\text{La médiane théorique existe , est unique et vaut } M = \theta}$.

b) $f_X(M)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(M-\theta)^2}{2\times 1^2}}$ et comme $M=\theta$, $\boxed{f_X(M)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}}$;

Soit $x\in\mathbf{R}$. $F_X(2M-x)=F_X(2\theta-x)=P(X\leq 2\theta-x)=P\left(\dfrac{X-\theta}{1}\leq\theta-x\right)=\Phi(\theta-x)$.

D'autre part $1-F_X(x)=1-P(X\leq x)=1-P(X-\theta\leq x-\theta))=1-\Phi(x-\theta)$.
Puisque $\forall u\in\mathbf{R}$,$\Phi(-u)=1-\Phi(u)$, on a bien $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}\ ,\ F_X(2M-x)=1-F_X(x)}$.
En dérivant ($X\mapsto\mathbf{N}(\theta,1)$ donc F_X est dérivable sur $\mathbf{R}$) , on obtient donc $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}\ ,\ \ f_X(2M-x)=f_X(x)}$.

c) Soit $k\in[\![1,n]\!]$ .D'après **I)** 1) e) , $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_{Y_k}(x)=k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(F_X(x))^{k-1}(1-F_X(x))^{n-k}f_X(x)$.

D'après **I)** 1) f) , comme $E(X)$ existe , $E(Y_k)$ existe et par suite $E(Y_k-M)$ existe aussi .

D'après 8) b) , $f_{Y_k}(2M-x)=k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(F_X(2M-x))^{k-1}(1-F_X(2M-x))^{n-k}f_X(2M-x)$

$$=k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(1-F_X(x))^{k-1}(F_X(x))^{n-k}f_X(x).$$

Comme $(n-k+1)\begin{pmatrix}n\\n-k+1\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}n-1\\n-k\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}n-1\\k-1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$, on a $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_{Y_k}(2M-x)=f_{Y_{n-k+1}}(x)$.

Par suite le changement de variable $x=2M-u$ ($u\to 2M-u$ est C^1, strictement décroissante dur $\mathbf{R}$) dans une intégrale convergente donne :

$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M)\,f_{Y_k}(x)dx=\int_{+\infty}^{-\infty}(M-u)\,f_{Y_k}(2M-u)(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty}(M-u)\,f_{Y_{n-k+1}}(u)du$,

autrement dit $\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!]\ E(Y_k-M)=E(M-Y_{n-k+1})}$.

d) Supposons $n=2l+1$. Avec $k=l+1$, l'égalité précedente donne $E(Y_{l+1}-M)=E(M-Y_{l+1})$,
autrement dit $E(Y_{l+1})-M=M-E(Y_{l+1})$. **CCL :** $\boxed{E(Y_{l+1})=M}$.
L'espérance de la médiane empirique est égale à la médiane théorique .

Comme $E(Y_{l+1})=M=\theta$, Y_{l+1} (qui est fonction de $(X_1,X_2,...,X_n)$)un estimateur sans biais de θ.
D'après **I)** 1) f) , comme $E(X^2)$ existe , $E({Y_{l+1}}^2)$ existe et Y_{l+1} admet donc une variance .
On en déduit que $Y_{l+1}\in\varepsilon_\theta$ et puisque $\overline{X_n}$ est optimal dans ε_θ , $V(Y_{l+1})\geq V(\overline{X_n})$.
Or $\overline{X_n}\mapsto\mathbf{N}(\theta,\frac{1}{n})$ donc $V(\overline{X_n})=\dfrac{1}{n}$. On peut conclure que $\boxed{V(Y_{l+1})\geq\dfrac{1}{n}}$.

Partie III.

$T\mapsto\mathbf{N}(0,1)$. U VAR . Erreur d'énoncé : On pose , pour $s\in\mathbf{R}$, $\boxed{L_U(s)=E(e^{sU})}$ sous réserve d'existence .

9) a) $0<p<1$. $J\mapsto\mathbf{B}(1,p)$. e^{sJ} est discrète donc admet une espérance et avec le théorème du transfert , on obtient $L_J(s)=E(e^{sJ})=e^{s\times 0}P(J=0)+e^{s\times 1}P(J=1)$ autrement dit $\boxed{L_J(s)=q+pe^s}$.

b) D'après le th du transfert , $L_T(s)=E(e^{sT})$ existe ssi $\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{I}$ est absolument convergente .

$I=e^{\frac{s^2}{2}}\times\frac{1}{1\times\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-s)^2}{2\times 1^2}}dt=e^{\frac{s^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ où f est une densité de la loi $\mathbf{N}(s,1)$.

On en déduit que $\boxed{L_T(s) \text{ existe et vaut } e^{\frac{s^2}{2}}}$.

c) Soit $(\theta,\sigma)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{+*}$. $e^{s(\sigma T+\theta)}=e^{s\theta}\times e^{s'T}$ avec $s'=s\sigma$.

Avec le 9) b), on peut en déduire l'existence de $E(e^{s(\sigma T+\theta)})$ et sa valeur : $L_{\sigma T+\theta}(s)=e^{s\theta}\times E(e^{s'T})=e^{s\theta}\times e^{\frac{s'^2}{2}}$

autrement dit $\boxed{\forall s\in \mathbf{R},\, L_{\sigma T+\theta}(s)=e^{s\theta+\frac{s^2\sigma^2}{2}}}$

10) Soit $x\in\mathbf{R}$. On pose pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\boxed{y_n=M+\frac{x}{\sqrt{n}}}$, $\boxed{q_n=F_X(y_n)}$ et $\boxed{k(n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}$

a) On a $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\le\frac{n}{2}<\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$ et donc $0<k(n)-\frac{n}{2}\le 1$. La suite $(k(n)-\frac{n}{2})$ est donc bornée .

On en déduit puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{k(n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}=0$ autrement dit $\boxed{k(n)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{n}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

b) Puisque f_X est $\mathbf{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que $F_X{}'=f_X$, F_X est $\mathbf{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et en particulier C^1 sur $\mathbf{R}$.
En appliquant la formule de Taylor-Young à la fonction F_X à l'ordre 1 au voisinage de M ,
On obtient $\forall t\in\mathbf{R}, F_X(t)=F_X(M)+\frac{t-M}{1!}F_X{}'(M)+o\left(t-M\right)$ et donc pour $t=M+\frac{x}{\sqrt{n}}$,

$F_X(M+\frac{x}{\sqrt{n}})=F_X(M)+\frac{x}{\sqrt{n}}F_X{}'(M)+o\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

Comme $F_X(M)=\frac{1}{2}$ et $F_X{}'(M)=f_X(M)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (voir 8) b)) , on a bien

$$\boxed{q_n=F_X(M+\frac{x}{\sqrt{n}})=\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{2\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.$$

c) On pose pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\boxed{u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(k(n)-nq_n\right)}$. De 10) a) b) , on tire $k(n)-nq_n=-\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}+o(\sqrt{n})$

et par suite , $u_n=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}+o(1)$. **CCL :** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}$.

11) a) On pose pour $n\in \mathbf{N}^*$, $\boxed{W_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_n(y_n)-nq_n\right)}$.

D'après 1) b) , $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}J_k(x)$ avec $J_1(x),J_2(x),...,J_n(x)$ indépendantes de loi $\mathbf{B}(1,F_X(x))$

Comme $F_X(y_n)=q_n$, $S_n(y_n)=\sum_{k=1}^{n}J_k(y_n)$ avec $J_1(y_n),J_2(y_n),...,J_n(y_n)$ indépendantes de loi $\mathbf{B}(1,q_n)$.

$S_n(x)\mapsto \mathbf{B}(n,F_X(x))$ donc $S_n(x)\mapsto \mathbf{B}(n,q_n)$.

On a $W_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_n(y_n)-nq_n\right)$ et donc pour $s\in \mathbf{R}$, $e^{sW_n}=e^{-s\sqrt{n}\,q_n}\times e^{\frac{s}{\sqrt{n}}(S_n(y_n))}=e^{-s\sqrt{n}\,q_n}\times\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{s}{\sqrt{n}}J_k(y_n)}$.

Les variables en présence sont toutes discrètes donc $L_{W_n}(s)$ existe et par indépendance des $J_k(y_n)$,

$L_{W_n}(s)=E(e^{sW_n})=e^{-s\sqrt{n}\,q_n}\times\prod_{k=1}^{n}E(e^{\frac{s}{\sqrt{n}}J_k(y_n)})=e^{-s\sqrt{n}\,q_n}\times\prod_{k=1}^{n}L_{J_k(y_n)}(\frac{s}{\sqrt{n}})$.

En appliquant le 9) a), on obtient donc $\boxed{\forall s\in \mathbf{R},\ \ L_{W_n}(s)=e^{-s\sqrt{n}\,q_n}\left(1-q_n+q_ne^{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)^n}$.

b) On en déduit $\forall s\in \mathbf{R},\ \ln\left(L_{W_n}(s)\right)=-s\sqrt{n}\,q_n+n\ln\left(1+q_n(e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-1)\right)$.

On a au voisinage de 0 , $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. On en déduit $e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}=1+\frac{s}{\sqrt{n}}+\frac{s^2}{2n}+o(\frac{1}{n})$.

La formule de Taylor Young à l'ordre 2 de F_X au voisinage de M donne :

$F_X(M+\frac{x}{\sqrt{n}})=F_X(M)+\frac{x}{\sqrt{n}}F_X'(M)+\frac{x^2}{2n}F_X''(M)+o\left(\frac{x^2}{n}\right)$.

Comme $F_X''(M)=f_X'(M)=f_X'(\theta)=-\frac{(\theta-\theta)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\theta-\theta)^2}{2}}=0$, on a : $q_n=\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{2\pi n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par produit , on obtient $q_n(e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-1)=\frac{s}{2\sqrt{n}}+\left(\frac{s^2}{4}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a au voisinage de 0 , $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

On en déduit par composition , comme $\lim_{n\to+\infty}q_n(e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-1)=0$,

$\ln\left(1+q_n(e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-1)\right)=\frac{s}{2\sqrt{n}}+\left(\frac{s^2}{4}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{n}-\frac{s^2}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $n\ln\left(1+q_n(e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-1)\right)=\frac{s\sqrt{n}}{2}+\frac{s^2}{8}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}}+o(1)$.

D'autre part avec le 10) b) , $-s\sqrt{n}\,q_n=-s\sqrt{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{2\pi n}}+o(1)\right)=\frac{-s\sqrt{n}}{2}-\frac{sx}{\sqrt{2\pi}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Enfin par addition $\boxed{\forall s\in \mathbf{R},\quad \ln\left(L_{W_n}(s)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{s^2}{8}+o(1)}$. On en déduit $\forall s\in \mathbf{R},\quad \lim_{n\to+\infty}L_{W_n}(s)=e^{\frac{s^2}{8}}$

et comme d'après 9) c) , $\forall s\in \mathbf{R}$, $L_{\sigma T+\theta}(s)=e^{s\theta+\frac{s^2\sigma^2}{2}}$, on conclut que $\boxed{\forall s\in \mathbf{R},\quad \lim_{n\to+\infty}L_{W_n}(s)=L_{\frac{T}{2}}(s)}$.

12) Pour $x=0$, on a $y_n = M$, $q_n = F_X(M) = \dfrac{1}{2}$,

$S_n(y_n) = \sum_{k=1}^{n} J_k(y_n)$ avec $J_1(y_n), J_2(y_n), ..., J_n(y_n)$ indépendantes de même loi $\mathbf{B}(1,\dfrac{1}{2})$.

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_n(y_n) - n\times q_n\right) = \frac{1}{2}\times\frac{S_n(y_n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{1}{2}\times\frac{S_n(y_n)-E\left(S_n(y_n)\right)}{\sigma\left(S_n(y_n)\right)} = \frac{1}{2}\times S_n^{\ *}(y_n) \ .$$

D'après le théorème de la limite centrée , $S_n^{\ *}(y_n)$ converge en loi vers la VAR T de loi $\mathbf{N}(0,1)$.

Soit $x\in\mathbf{R}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{W_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n \le x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n^{\ *}(y_n) \le 2x) = P(T \le 2x) = P(\dfrac{T}{2} \le x)$.

CCL : $\boxed{W_n \text{ converge en loi vers la VAR } \dfrac{T}{2}}$.

13) a) D'après 1) c) , $\left[S_n(y_n) \ge k(n)\right] = \left[Y_{k(n)} \le y_n\right] = \left[Y_{k(n)} \le M + \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right] = \left[\sqrt{n}(Y_{k(n)} - M) \le x\right]$.

D'autre part $\left[S_n(y_n) \ge k(n)\right] = \left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}(S_n(y_n) - nq_n) \ge \dfrac{1}{\sqrt{n}}(k(n) - nq_n)\right] = \left[W_n \ge u_n\right]$.

On peut conclure : $\boxed{\left[\sqrt{n}(Y_{k(n)} - M) \le x\right] = \left[S_n(y_n) \ge k(n)\right] = \left[W_n \ge u_n\right]}$.

b) $\forall s \in \mathbf{R}$, $L_{u_n - W_n}(s) = E(e^{s(u_n - W_n)}) = E(e^{su_n}e^{-sW_n}) = e^{su_n} L_{W_n}(-s)$

D'après 10) c) , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}$ et d'après 11) b) **,** $\forall s\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} L_{W_n}(s) = e^{\frac{s^2}{8}}$.

On en déduit que $\forall s\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} L_{u_n - W_n}(s) = e^{\frac{s^2}{8} - \frac{sx}{\sqrt{2\pi}}}$ et avec 9) c) : $\forall s\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} L_{u_n - W_n}(s) = L_{\frac{T}{2} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}}$.

Comme dans l'énoncé , on admet alors que la suite $(u_n - W_n)$ converge en loi vers la VAR $\dfrac{T}{2} - \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n \ge u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(u_n - W_n \le 0) = P(\dfrac{T}{2} - \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}} \le 0)$ autrement dit

pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n \ge u_n) = P(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}T \le x)}$**.**

c) D'après 13) a) , $P\left[\sqrt{n}(Y_{k(n)} - M) \le x\right] = P\left[W_n \ge u_n\right]$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left[\sqrt{n}(Y_{k(n)} - M) \le x\right] = P(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}T \le x)$

En posant $t = x\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left[\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}(Y_{k(n)} - M) \le t\right] = P(T \le t)$ pour tout $t\in\mathbf{R}$ ($x\to x\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ bij de $\mathbf{R}$ ds $\mathbf{R}$)

CCL : $\boxed{\text{La suite de variables aléatoires } \left(\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}(Y_{k(n)} - M)\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en loi vers la VAR } T}$**.**

14) On suppose $n = 2l+1$ ($l \in \mathbf{N}$).

a) $\boxed{k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor l + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = l+1}$.

b) D' après 8)d) , $E(Y_{l+1}) = M$ pour tout $l \in \mathbf{R}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(Y_{k(n)}) = M}$.

c) Puisque $E(Y_{k(n)}) = M$, $V(Y_{k(n)}) = E\left((Y_{k(n)} - M)^2\right) = \frac{\pi}{2n} E\left(\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}(Y_{k(n)} - M)\right)^2\right)$.

On en déduit d'après le résultat admis que $V(Y_{k(n)}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} E(T^2)$.

$T \mapsto \mathbf{N}(0,1)$ donc $E(T^2) = V(T) + \left(E(T)\right)^2 = 1$. Finalement $\boxed{V(Y_{k(n)}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}}$.

d) $\rho_n = \frac{\operatorname{cov}(Y_{k(n)}, \overline{X}_n)}{\sigma(Y_{k(n)})\sigma(\overline{X}_n)} = \frac{\operatorname{cov}(Y_{k(n)} - \overline{X}_n, \overline{X}_n) + V(\overline{X}_n)}{\sigma(Y_{k(n)})\sigma(\overline{X}_n)}$.

D'après 5) , $V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}$.

D'après 8) , $Y_{k(n)} = Y_{l+1} \in \varepsilon_\theta$ et d'après 7) , $\overline{X}_n$ est optimal dans ε_θ donc $\operatorname{cov}(Y_{k(n)} - \overline{X}_n, \overline{X}_n) = 0$.

On en déduit $\rho_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}}$.